Principio de Acotación Uniforme y Teorema de la Aplicación Abierta

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E, así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E, así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E , así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E.En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, puede haber subconjuntos de E que "vistos desde E" sean "grandes", pero que "vistos desde F" sean "pequeños".

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E , así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E.En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, puede haber subconjuntos de E que "vistos desde E" sean "grandes", pero que "vistos desde F" sean "pequeños".Sin embargo, es fácil ver que todo conjunto de primera categoría ("pequeño") en E sigue siendo de primera categoría ("pequeño") en F.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E , así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E.En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, puede haber subconjuntos de E que “vistos desde E” sean “grandes”, pero que “vistos desde F” sean “pequeños”.Sin embargo, es fácil ver que todo conjunto de primera categoría (“pequeño”) en E sigue siendo de primera categoría (“pequeño”) en F.

Proposición. Sea F un espacio topológico y $E \subset F$ un subespacio topológico. Entonces todo conjunto de primera categoría en E también es de primera categoría en F.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E , así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E.En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, puede haber subconjuntos de E que "vistos desde E" sean "grandes", pero que "vistos desde F" sean "pequeños".Sin embargo, es fácil ver que todo conjunto de primera categoría ("pequeño") en E sigue siendo de primera categoría ("pequeño") en F.

Proposición. Sea F un espacio topológico y $E \subset F$ un subespacio topológico. Entonces todo conjunto de primera categoría en E también es de primera categoría en F.

En lo que sigue conviene tener en cuenta que un subconjunto A de un espacio topológico E tiene interior vacío, $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, si, y sólo si, su complemento es denso, $\overline{(E \setminus A)} = E$.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.

Lema de Categoría de Baire. Si E es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E. En particular, E es de segunda categoría en sí mismo.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.

Lema de Categoría de Baire. Si E es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E. En particular, E es de segunda categoría en sí mismo.

Corolario. En un espacio métrico completo el complemento de un conjunto de primera categoría es de segunda categoría y denso en el espacio.

Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en E cuya unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.

Lema de Categoría de Baire. Si E es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E. En particular, E es de segunda categoría en sí mismo.

Corolario. En un espacio métrico completo el complemento de un conjunto de primera categoría es de segunda categoría y denso en el espacio.

Corolario. La dimensión de un espacio de Banach es finita o no numerable.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X, Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X, Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X, Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

ii) $B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

ii) $B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.

iii) $\mathcal{A}$ está uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

ii) $B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.

iii) $\mathcal{A}$ está uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

ii) $B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.

iii) $\mathcal{A}$ está uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Corolario. Sea X un espacio de Banach, un conjunto $A \subset X^*$ está acotado si, y sólo si, está puntualmente acotado.

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$.Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Teorema de Banach–Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) B es de segunda categoría en X.

ii) $B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.

iii) $\mathcal{A}$ está uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.

Corolario. Sea X un espacio de Banach, un conjunto $A \subset X^*$ está acotado si, y sólo si, está puntualmente acotado.

Corolario. Sea X un espacio normado. Un conjunto $B \subset X$ está acotado si, y sólo si, para todo $x^* \in X^*$ el conjunto $\{x^*(x) : x \in B\}$ está acotado.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X, Y)$.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.
Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
3. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.
Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
3. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
4. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente.

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
3. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
4. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente.
5. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ tienen sumas parciales acotadas

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.
Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
3. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
4. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente.
5. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ tienen sumas parciales acotadas

Teorema de cierre de Steinhaus. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \quad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

Proposición. Las funciones continuas $f \in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.

Proposición. Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $y \in \ell_1$.
2. Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
3. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.
4. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente.
5. Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ tienen sumas parciales acotadas

El mismo resultado es válido si cambiamos en la proposición anterior c_0 por ℓ_p y ℓ_1 por ℓ_q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = \big(a_{nm}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.Dada una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos hacer formalmente el producto de la matriz A por el vector columna x, lo que nos da la sucesión Ax definida por

$$[Ax](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,x(k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

siempre que estas series sean convergentes.

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.Dada una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos hacer formalmente el producto de la matriz A por el vector columna x, lo que nos da la sucesión Ax definida por

$$[Ax](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x(k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

siempre que estas series sean convergentes.Esto lleva a definir el **dominio** de la matriz A como el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^N : \sum_{m\geqslant 1} a_{nm}x(m) \text{ converge para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.Dada una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos hacer formalmente el producto de la matriz A por el vector columna x, lo que nos da la sucesión Ax definida por

$$[Ax](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x(k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

siempre que estas series sean convergentes.Esto lleva a definir el **dominio** de la matriz A como el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^N : \sum_{m\geqslant 1} a_{nm}x(m) \text{ converge para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Claramente $c_{00} \subset D(A)$.

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.Dada una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos hacer formalmente el producto de la matriz A por el vector columna x, lo que nos da la sucesión Ax definida por

$$[Ax](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x(k) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

siempre que estas series sean convergentes.Esto lleva a definir el **dominio** de la matriz A como el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{N} : \sum_{m\geqslant 1} a_{nm} x(m) \text{ converge para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Claramente $c_{00} \subset D(A)$.Cuando $D(A)$ contiene a las sucesiones convergentes, c, y además, para todo $x \in c$ la sucesión $A(x)$ es convergente y tiene el mismo límite que x

$$\lim_{n\to\infty} [Ax](n) = \lim_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x \in c$$

se dice que A es **regular**.

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \; : \; n\in\mathbb{N}\right\}<\infty.$

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \;:\; n\in\mathbb{N}\right\} < \infty$.

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}<\infty.$

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0.$

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1.$

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N}\right\}<\infty$.

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$.

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N}\right\} < \infty$.

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$.

Criterio de Stolz. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos estrictamente creciente y divergente y $\{a_n\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L.$$

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N}\right\} < \infty$.

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$.

Criterio de Stolz. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos estrictamente creciente y divergente y $\{a_n\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L.$$

Entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$.

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N} \right\} < \infty.$

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0.$

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1.$

Criterio de Stolz. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos estrictamente creciente y divergente y $\{a_n\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L.$$

Entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$

Teorema de Mertens. Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ una serie absolutamente convergente y $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ una serie convergente.

Condiciones de Silverman-Toeplitz. Una matriz infinita de escalares, $A = (a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ : \ n\in\mathbb{N}\right\} < \infty.$

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

iii) Existe el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$.

Criterio de Stolz. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos estrictamente creciente y divergente y $\{a_n\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L.$$

Entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$.

Teorema de Mertens. Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ una serie absolutamente convergente y $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ una serie convergente.Entonces se verifica que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k \quad (n\in\mathbb{N}\cup\{0\}).$$

(producto de Cauchy de dichas series) es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Donde J es la *inclusión natural* de $T(X)$ en Y, que es un monomorfismo, π es el *epimorfismo cociente*, y $\widetilde{T}$ es el *isomorfismo cociente*.

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Donde J es la *inclusión natural* de $T(X)$ en Y, que es un monomorfismo, π es el *epimorfismo cociente*, y $\widetilde{T}$ es el *isomorfismo cociente*.Si ahora suponemos que X e Y son espacios normados y $T \in L(X, Y)$, sabemos que:

- El epimorfismo cociente π es una aplicación continua y abierta.

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker(T) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Donde J es la *inclusión natural* de $T(X)$ en Y, que es un monomorfismo, π es el *epimorfismo cociente*, y $\widetilde{T}$ es el *isomorfismo cociente*.Si ahora suponemos que X e Y son espacios normados y $T \in L(X, Y)$, sabemos que:

- El epimorfismo cociente π es una aplicación continua y abierta.
- El isomorfismo cociente $\widetilde{T}$ es continuo.

Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\ker(T) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

Donde J es la *inclusión natural* de $T(X)$ en Y, que es un monomorfismo, π es el *epimorfismo cociente*, y $\widetilde{T}$ es el *isomorfismo cociente*.Si ahora suponemos que X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, sabemos que:

- El epimorfismo cociente π es una aplicación continua y abierta.
- El isomorfismo cociente $\widetilde{T}$ es continuo.
- $\widetilde{T}$ es un isomorfismo topológico de $X/\ker(T)$ sobre $T(X)$ si, y sólo si, $\widetilde{T} \circ \pi$ es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Nuestro propósito es estudiar condiciones para que una aplicación lineal entre espacios normados sea un homomorfismo topológico. En particular, condiciones que garanticen que una biyección lineal continua entre espacios normados sea un isomorfismo topológico, es decir, que su inversa sea continua.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Nuestro propósito es estudiar condiciones para que una aplicación lineal entre espacios normados sea un homomorfismo topológico. En particular, condiciones que garanticen que una biyección lineal continua entre espacios normados sea un isomorfismo topológico, es decir, que su inversa sea continua.

Conviene tener presentes en lo que sigue las siguientes observaciones.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Nuestro propósito es estudiar condiciones para que una aplicación lineal entre espacios normados sea un homomorfismo topológico. En particular, condiciones que garanticen que una biyección lineal continua entre espacios normados sea un isomorfismo topológico, es decir, que su inversa sea continua.

Conviene tener presentes en lo que sigue las siguientes observaciones.

- *Toda aplicación lineal y abierta entre espacios normados es sobreyectiva.*

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$.Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X, Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$.Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**.Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Nuestro propósito es estudiar condiciones para que una aplicación lineal entre espacios normados sea un homomorfismo topológico. En particular, condiciones que garanticen que una biyección lineal continua entre espacios normados sea un isomorfismo topológico, es decir, que su inversa sea continua.

Conviene tener presentes en lo que sigue las siguientes observaciones.

- *Toda aplicación lineal y abierta entre espacios normados es sobreyectiva.*
- *Una aplicación lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios normados, es abierta si, y sólo si, la imagen de algún entorno de cero en X es un entorno de cero en Y.*

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.

Proposición. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es abierta y por tanto sobreyectiva e Y es completo.

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.

Proposición. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es abierta y por tanto sobreyectiva e Y es completo.

Teorema de la aplicación abierta. Toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Banach es una aplicación abierta.

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.

Proposición. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es abierta y por tanto sobreyectiva e Y es completo.

Teorema de la aplicación abierta. Toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Banach es una aplicación abierta.

Teorema del isomorfismo de Banach. Toda biyección lineal continua entre espacios de Banach es un isomorfismo topológico.

Lema. Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

Lema. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.

Proposición. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es abierta y por tanto sobreyectiva e Y es completo.

Teorema de la aplicación abierta. Toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Banach es una aplicación abierta.

Teorema del isomorfismo de Banach. Toda biyección lineal continua entre espacios de Banach es un isomorfismo topológico.

Teorema del homomorfismo de Banach. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Entonces T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, $T(X)$ es cerrado en Y.

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach). Todo homomorfismo topológico $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios de Banach, factoriza en la forma $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker(T)$ es un epimorfismo topológico, $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico, y $J : T(X) \to Y$ es un monomorfismo topológico.

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach). Todo homomorfismo topológico $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios de Banach, factoriza en la forma $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\mathrm{ker}(T)$ es un epimorfismo topológico, $\widetilde{T} : X/\mathrm{ker}(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico, y $J : T(X) \to Y$ es un monomorfismo topológico.

Corolario. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$, entonces se verifica que dicha suma es topológico-directa.

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach). Todo homomorfismo topológico $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios de Banach, factoriza en la forma $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker(T)$ es un epimorfismo topológico, $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico, y $J : T(X) \to Y$ es un monomorfismo topológico.

Corolario. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$, entonces se verifica que dicha suma es topológico-directa.

La gráfica de una aplicación, f, de un espacio topológico X en otro Y es el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach). Todo homomorfismo topológico $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios de Banach, factoriza en la forma $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker(T)$ es un epimorfismo topológico, $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico, y $J : T(X) \to Y$ es un monomorfismo topológico.

Corolario. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$, entonces se verifica que dicha suma es topológico-directa.

La gráfica de una aplicación, f, de un espacio topológico X en otro Y es el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

Decimos que f tiene **gráfica cerrada** si $G(f)$ es cerrado en el espacio topológico producto $X \times Y$.

Corolario. Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.

Corolario. (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach). Todo homomorfismo topológico $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios de Banach, factoriza en la forma $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker(T)$ es un epimorfismo topológico, $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico, y $J : T(X) \to Y$ es un monomorfismo topológico.

Corolario. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$, entonces se verifica que dicha suma es topológico-directa.

La gráfica de una aplicación, f, de un espacio topológico X en otro Y es el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

Decimos que f tiene **gráfica cerrada** si $G(f)$ es cerrado en el espacio topológico producto $X \times Y$.

Teorema de la gráfica cerrada. Toda aplicación lineal entre espacios de Banach con gráfica cerrada es continua.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces T es continua.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces T es continua.

Si X es un espacio normado, se dice que una familia de funcionales lineales continuos, $F \subset X^*$, **separa puntos** en X cuando el único vector en el que se anulan todos los funcionales de dicha familia es el cero, es decir, si $x \in X$ y $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in F$ entonces $x = 0$.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces T es continua.

Si X es un espacio normado, se dice que una familia de funcionales lineales continuos, $F \subset X^*$, **separa puntos** en X cuando el único vector en el que se anulan todos los funcionales de dicha familia es el cero, es decir, si $x \in X$ y $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in F$ entonces $x = 0$.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y F un subconjunto de Y^* que separa puntos en Y. Entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, $y^* \circ T$ es continuo para todo $y^* \in F$.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces T es continua.

Si X es un espacio normado, se dice que una familia de funcionales lineales continuos, $F \subset X^*$, **separa puntos** en X cuando el único vector en el que se anulan todos los funcionales de dicha familia es el cero, es decir, si $x \in X$ y $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in F$ entonces $x = 0$.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y F un subconjunto de Y^* que separa puntos en Y. Entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, $y^* \circ T$ es continuo para todo $y^* \in F$.

Corolario. Si X es un espacio de Banach y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces un operador lineal $T : X \to \ell_p$ es continuo si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional lineal en X dado por
$x \to [Tx](n)$ es continuo. En particular, cualquier norma completa en ℓ_p con la propiedad de que la convergencia en dicha norma implique convergencia puntual, es equivalente a la norma de ℓ_p.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces T es continua.

Si X es un espacio normado, se dice que una familia de funcionales lineales continuos, $F \subset X^*$, **separa puntos** en X cuando el único vector en el que se anulan todos los funcionales de dicha familia es el cero, es decir, si $x \in X$ y $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in F$ entonces $x = 0$.

Corolario. Sean X e Y espacios de Banach y F un subconjunto de Y^* que separa puntos en Y. Entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, $y^* \circ T$ es continuo para todo $y^* \in F$.

Corolario. Si X es un espacio de Banach y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces un operador lineal $T : X \to \ell_p$ es continuo si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional lineal en X dado por
$x \to [Tx](n)$ es continuo. En particular, cualquier norma completa en ℓ_p con la propiedad de que la convergencia en dicha norma implique convergencia puntual, es equivalente a la norma de ℓ_p.

Corolario. Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal que transforma sucesiones uniformemente convergentes a cero un sucesiones puntualmente convergentes a cero, entonces T es continuo. En particular, cualquier norma completa en $C[0,1]$ con la propiedad de que la convergencia en dicha norma implique convergencia puntual, es equivalente a la norma uniforme.